EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 8

1. $y \in \mathbb{R}$, $P(iy) = y^4 + i\sqrt{2}\,y^3 - 4\sqrt{2}\,iy - 16 = \left(y^4 - 16\right) + i\left(\sqrt{2}\,y^3 - 4\sqrt{2}\,y\right)$.

2. $y \in \mathbb{R}$ et $P(iy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 16 = 0 \\ \sqrt{2}\,y^3 + 4\sqrt{2}\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+2)(y^2+4) = 0 \\ y\sqrt{2}(y-2)(y+2) = 0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow$ $y = -2$ ou $y = 2$.

   Donc l'équation P(z) = 0 admet deux solutions imaginaires pures $2i$ et $-2i$.

3. Pour tout nombre complexe z,

   $(z^2+4)(az^2+bz+c) = az^4 + bz^3 + 4az^2 + 4bz + 4c$.

   Par identification avec P(z), on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ 4a = 4 \\ 4b = 4\sqrt{2} \\ 4c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ c = -4 \end{cases}$.

4. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2+4)\left(z^2 - z\sqrt{2} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4$ ou $z^2 - z\sqrt{2} - 4 = 0$

   Or $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$

   Et le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - z\sqrt{2} - 4 = 0$ est

   $\Delta = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4(-4) = 18 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$ donc les solutions de cette équation sont

   $\dfrac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

   Par suite l'ensemble de solution de l'équations P(z) = 0 est $S = \left\{2i, -2i, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$.

5. Soit $\Omega\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, désignons par A, B, C et D les images dans le plan complexe

   respectives des solutions $2i, -2i, -\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ de l'équation P(z) = 0.

   $\Omega A = \left|2i - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{2} + 4} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\Omega B = \left|-2i - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{2} + 4} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

   $\Omega C = \left|-\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\Omega D = \left|2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

   Donc les points A, B, C et D sont situés sur le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.